

Intégrales impropres et généralisées

Exercice 1 Pour quelles valeurs de a l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^a} dt$ converge-t-elle ?

Exercice 2 Déterminer la convergence de $\int_0^{+\infty} \sin(e^t) dt$.

Exercice 3 On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions F et G par

$$F(a) = \left(\int_0^a e^{-x^2} dx \right)^2 \text{ et } G(a) = \int_0^{\pi/4} \left(1 - e^{\frac{-a^2}{\cos^2 \theta}} \right) d\theta.$$

1. Déterminer $G'(a)$; en déduire $G(a) = F(a)$.

2. Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Exercice 4 Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+t^3} dt$. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t} dt$.

1. Après avoir déterminé le domaine de définition D de F , montrer que F est continue sur K .

2. Montrer que F est dérivable sur K , calculer F' et en déduire une expression simple de F .

Exercice 6 Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2}$. Montrer que F est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 7 Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos xt dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .

2. Calculer f' .

3. Montrer que $f'(x) = -xf(x)$.

4. Donner une expression simple de $f(x)$.