

Exercices sur les séries entières

**Exercice 1** Soit  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$  avec  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière. La série est-elle convergente en  $\pm R$  ?
2. Exprimer  $f$  à l'aide des fonctions usuelles.

**Exercice 2** Déterminer le rayon de convergence et la somme de

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 4n - 1}{n!} x^n.$$

**Exercice 3** Déterminer une série entière solution de

$$\begin{cases} y'' + xy = x^2 + x + 2 \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

**Exercice 4** Déterminer une série entière solution de

$$\begin{cases} xy'' - y = x^2 + x - 1 \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$