Arnaud Hirtz
Analyse DEUG 2
Université de Haute Alsace

Exercices sur les séries entières

Exercice 1 *Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :*

$$\sum \frac{x^n}{n^n} \qquad \sum n^n x^n \qquad \sum \ln(n) x^n$$
$$\sum \frac{x^n}{\ln(n)} \qquad \sum \cos\left(\frac{1}{n}\right) x^n \qquad \sum \frac{x^n}{n^4}$$
$$\sum C_{2n}^n x^{2n} \qquad \sum f_n x^n \text{ où } f_n \text{ est la } n^{\text{ième}} \text{ décimales de } e.$$

Exercice 2 *Donner le développement en séries entières des fonctions suivantes et indiquer les rayons de convergence.*

$$\frac{1}{1+x^2} \qquad \arctan x \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\arcsin x \qquad e^{-x^2} \qquad \frac{1}{2+3x}$$
$$\frac{3x-2}{(2x+1)(x-3)} \qquad \sin 3x + x\cos 3x \qquad \ln\left(1 - \frac{x}{2x^2-1}\right)$$

Exercice 3 *Calculer le rayon de convergence R et la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$. Etudier la convergence de la série en $x = \pm R$. (Indication : pour calculer la somme on pourra utiliser que $n^2 = n(n-1) + n$).*

Exercice 4 *Calculer le rayon de convergence R et la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$. Etudier la convergence de la série en $x = \pm R$.*

Exercice 5 *Soit $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2-1} x^n$.*

1. *Déterminer le rayon de convergence R de la série entière.*
2. *Montrer que pour $x \neq 0$ on a $S(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right]$*
3. *Déterminer $S(x)$.*
4. *La série converge-t-elle en $\pm R$.*

Exercice 6 *Déterminer le développement en série entière de $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 4)$. (On pourra utiliser le changement de variable $x = 2t$).*