

Fonctions définies par une intégrale, fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 Soit $F(x) = \int_{2x+1}^{2e^x+x^2} \sin(t+x)dt$.

1. La fonction est-elle continue ?
2. La fonction est-elle dérivable ? Si oui, donner sa dérivée.

Exercice 2 Déterminer la matrice jacobienne des fonctions suivantes :

1. $f(x, y, z) = (z \sin(xy), x^2y + xz, 2ye^{xz} \cos(xy))$
2. $f(x, y, z) = \left(x^2y^3z, y \ln(1 + x^2z^4), z^2 \exp \frac{1}{x^2y^2z^2 + 1} \right)$

Exercice 3 Soit $f(x, y, z) = \sin(xyz) + x^2y + z^3$. Calculer le gradient et le laplacien de f .

Exercice 4 Soit $\varphi(x, y, z) = (2xyz^2, z \sin(x+y), z^3 \exp(x^2))$. Calculer la divergence et le rotationnel de φ .

Exercice 5 Soit $\varphi(x, y, z) = (3x^2y^2z^4, 2x^3yz^4, 4x^3y^2z^3)$. Montrer que f dérive d'un potentiel puis trouver f tel que $\varphi = \overrightarrow{\text{grad}} f$.

Exercice 6 Etudier la continuité et la différentiabilité de $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 7 Soit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Etudier la continuité de f en $(0, 0)$.
2. Etudier l'existence et la continuité des dérivées partielles.

Exercice 8 Soit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin x^3 - \sin y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Etudier la continuité de f en $(0, 0)$.
2. Etudier l'existence et la continuité des dérivées partielles.

Exercice 9 Soit $f(x, y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Etudier la continuité de f en $(0, 0)$.
2. Etudier l'existence et la continuité des dérivées partielles.

Exercice 10 Etudier la différentiabilité de $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.