Arnaud Hirtz
Analyse DEUG 2
Université de Haute Alsace

Exercices sur la convergence de séries numériques

Exercice 1 *Déterminer la convergence des suites dont le terme général est :*

$$2^n+3^n, \qquad 2^n+(-3)^n, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{3}\right)^n, \qquad \frac{\sin n}{n}, \qquad \frac{n^2\cos(1/n)}{n+1},$$

$$\min\left(1, \frac{n^2+12}{n^2+n+2}\right), \qquad \max(2, \sin n), \qquad \sqrt{n+1}-\sqrt{n}, \qquad \frac{n!}{n^4},$$

$$\frac{n^2}{2n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \qquad \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}, \qquad \left(n-\tfrac{1}{n^2}\right)^3-n^3,$$

$$(n^2-n+1)^{1/n}, \qquad (2\sin\tfrac{1}{n}+\tfrac{3}{4}\cos n)^n.$$

Exercice 2 *Soient a et b deux réels tels que $a > b > 0$. Déterminer la nature de $u_n = \dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$.*

Exercice 3 *a) Vérifier que pout tout $n > 10$ on a $0 \leq \dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.*

b) Pour $n > 0$ on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que la suite (u_n) est convergente et que sa limite L vérifie $\dfrac{5}{4} < L < 2$.

Exercice 4 *Pour $n > 0$ on pose $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. Grâce à un encadrement, montrer que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.*

Exercice 5 *Soit x un nombre rationnel. Déterminer la nature de $u_n = \cos(n!\pi x)$.*